ΘΕΜΑ 1

Σεπτέμβριος 2013

Αν *p,q,r* είναι τρεις λογικές προτάσεις ώστε οι $p \Rightarrow (q \wedge r)$ και $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$ να είναι αληθείς, να δειχθεί ότι η $\sim (p \vee q)$ είναι αληθής. Ισχύει το αντίστροφο;

ΘΕΜΑ 2

α)Έστω *Α,Β,Γ* τρία σύνολα. Να δειχθεί ότι $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$.

β)Να δειχθεί ότι ισχύει η συνεπαγωγή

$$(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$$

ΘΕΜΑ 3

α) Έστω *σ* μια διμελής σχέση σε ένα σύνολο *Ε*. Να αποδειχθεί ότι η *σ* είναι σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν $\Delta_E \subseteq \sigma$ και $\sigma = \sigma o \sigma^{-1}$ (όπου Δ_E είναι διαγώνιος του *Ε*).

β) Ορίζουμε μια σχέση *σ* στο $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 3x = 2y\}$$

Να εξεταστεί αν η σχέση *σ* είναι ανακλαστική (αυτοπαθής), συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f : A \to B$ μια συνάρτηση.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $Y \subseteq B$ ισχύει $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

β) Αν η *f* είναι επί του *Β* να δείξετε ότι $f(f^{-1}(Y)) = Y$ για κάθε $Y \subseteq B$.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $X \subseteq A$ ισχύει $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

δ) Αν η *f* είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) να δείξετε ότι για κάθε $X \subseteq A$ ισχύει $f^{-1}(f(X)) = X$.

ΘΕΜΑ 5

α) Αν $p, q \in \mathbb{N}$ να δείξετε ότι $p + q \in \mathbb{N}$.

β) Αν $p \in \mathbb{N}$ με $p \neq 0$ και $r \in \mathbb{N}$ να δείξετε ότι $p \cdot r \in \mathbb{N}$

γ) Δίνονται τρεις πραγματικοί αριθμοί *x,y,r* με *x+y<r*. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ρητοί αριθμοί *p,q* ώστε *x<p* , *y<p* και *p+q<r*.

ΘΕΜΑ 6

Να αποδείξετε με δύο τρόπους ότι $[0,1] \simeq (0,1)$.

α) Με τη χρήση του Θεωρήματος Schroder-Bernstein.

β) Απευθείας με εφαρμογή μόνο του ορισμού.